CPDJ Classe Spé

Abdul Aziz Traoré

November 12, 2021

Si l'esprit d'un homme s'égare, faites-lui étudier les mathématiques car dans les démonstrations, pour peu qu'il s'écarte, il sera obligé de recommencer. *Francis BACON*

Dormez! N'écoutez pas les parrains qui vous disent le contraire. *Abdul Aziz Traoré*

1 Problem

Definition extremum local: *Soit* I *un intervalle ouvert de* $\mathbb{R}$ $f : I \to \mathbb{R}$. *et* $a \in I$.

On dit que a est un :

- *maximum local* de f sur I s'il existe $\delta > 0$ *tel que pour tout* $x \in I$ *on ait* : $|x - a| < \delta \Longrightarrow f(x) \leq f(a)$;
- *minimum local* de f sur I s'il existe $\delta > 0$ *tel que pour tout* $x \in I$ *on ait* : $|x - a| < \delta \Longrightarrow f(x) \geq f(a);;$
- *extremum local* de f sur I si a est un minimum local ou un maximum local de f sur I.

1. *On suppose* I *un intervalle ouvert de* $\mathbb{R}$ $f : I \to \mathbb{R}$. *et* $x \in I$, *un extremum local de* f *sur* I.

   Demontrer que si f *est derivable en* x *alors* $f'(x) = 0$

2. *Soit* $a < b \in I$, *tels que* f *soit fonction continue sur* $[a, b]$ *et dérivable sur* $]a, b[$ *et* $f(a) = f(b)$.

   a. *Demontrer qu' il existe* $c \in]a, b[$ *tel que* $f'(c) = 0$.

   b. *En déduire l'existence de* $d \in]a, b[$ *tel que* $f(b) - f(a) = f'(d)\,(b - a)$.

3. *On suppose que f est continue et derivable sur $I\dot{D}$emontrer que f est croissante sur I si , et seulement si,*

on a $f'(x) \ \geq \ 0$ pour tout $x \in \ I$;

et que f est décroissante sur I si, et seulement si, on a $f'(x) \ \leq \ 0$ pour tout $x \in \ I$.

Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $I \subset J$. On suppose $h \in \ J$ tel que f derivable sur $J\setminus \{h\}$, et $\lim\limits_{\substack{x \to h \\ x \neq \ h}} f'(x) = l$

4. *Montrer que f est dérivable en h et $f'(h) = l$.*

5. *Demontrer que si f' est bornée sur $]a, \ b[$ alors f est lipschitzienne.*

2 Application

6. *Deduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|Sin(x)| \leq \|x|, |Arctan(x)| \leq \ |x|$.*

7. *Soit :*

$$g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\sin(x) + \cos(x)}{1 + \cos^2(x)} \end{array} \right. .$$

Montrer que, pour tout$a \in \mathbb{R}$, f' s'annule au moins une fois sur l'intervalle $]a, \ a+2\pi[$

8. *Montrer que $\forall x > 0$, $Artg(t) \ > \dfrac{t}{1+t^2}$*

9. $(***)$ *Determiner* $\lim\limits_{x\to\infty} \ x^2(\exp\dfrac{1}{x} \ - \exp\dfrac{1}{x+1})$